Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.76 θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ.155 Ορισμός

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.216

Α4.

α) Σ β)Σ γ)Λ δ)Λ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1

Για να ορίζεται η h πρέπει $h(x) \neq 0$. Είναι

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1.$$

Άρα $D_f = (1, +\infty)$. Ο τύπος της f είναι

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Επίσης, $D_r = D_{gh} = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ και ο τύπος της είναι

$$r(x) = g(x)h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$$

Β2

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty).$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ άρα και 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

Αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση, το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. Είναι

$$f\big((1, +\infty)\big) = \big(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x)\big) = (1, +\infty),$$

αφού $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$ και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to +1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$$

διότι $x-1>0$ όταν $x \to 1^+$.

Για τον τύπο της αντίστροφης, λύνουμε ως προς x την εξίσωση

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}, y \neq 1$$

Άρα ο τύπος της αντίστροφης είναι $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} = f(x),\ x \in (1, +\infty)$.

B3

Η $r(x)$ είναι συνεχής στο $D_r = [1, +\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Υπολογίζουμε

$$\lim_{x\to +\infty} r(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = +\infty,$$

επομένως δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Ελέγχουμε για πλάγιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$$

και

$$\lim_{x\to +\infty} (r(x) - x) = \lim_{x\to +\infty} (x - \frac{1}{x} - x) = \lim_{x\to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

Άρα η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη (δεν ελέγχουμε για $x \to -\infty$ λόγω του πεδίου ορισμού).

B4

Γνωρίζουμε ότι $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$, επομένως

$$\left(f^{-1}\big(f(x)\big)\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow 4\left(1 - \frac{1}{x}\right) + 1 = x^2 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

Οι πιθανές ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Βλέπουμε ότι το 1 είναι προφανής ρίζα και κάνοντας σχήμα Horner, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$(x-1)(x^2-3x-4)=0.$$

της οποίας οι ρίζες είναι οι $x=1, x=4$ και $x=-1$.

Οι ρίζες $x=-1$ και $x=1$ απορρίπτονται διότι δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Άρα η λύση είναι $x=4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1)

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της [0, +∞) άρα είναι συνεχής και στο x_0=2.

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right) = -4+4+e^{\lambda} = e^{\lambda}$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+}(-x^2+4x-3+\lambda) = -4+8-3+\lambda = 1+\lambda$$

Πρέπει και αρκεί $e^{\lambda}=1+\lambda \Leftrightarrow e^{\lambda}-\lambda-1=0$

Προφανής λύση η λ=0 είναι μοναδική αφού ισχύει η βασική ανισοτική σχέση $e^{\lambda}\geq\lambda+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο στο 0

Γ2) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της [0, +∞)

f'(x)=$\begin{cases} -2, 0<x<2 \\ -2x+4, x>2 \end{cases}$

Για x>2:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=2\ απορίπτεται$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow -2x>-4 \Leftrightarrow x<2\ απορίπτεται$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x>2$$

Έχουμε $f'(x)<0$ x∈(0,2) ∪(2,+∞) και η f είναι συνεχής στο [0,+∞) και στο x_0=2. Άρα η f είναι φθίνουσα στο [0,+∞).

Η παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(0)=5$ στην θέση x_1=0

Γ3)

α) η f είναι συνεχής στο [0,3]

η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,2)$\cup$(2,3)

Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα στο 2.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2-}\frac{-2x+4}{x-2}\lim\limits_{x\to 2-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$
- $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2+}\frac{x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2+}\frac{x^2+4x-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2+}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=0$

Το -2≠0 άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2. Δεν ισχύουν οι προυποθέσεις του ΘΜΤ.

Γ3)

β)

Είναι $\lambda_{ΔΕ}$=$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{0-5}{3}=-\frac{5}{3}$

Εξετάζουμε αν υπάρχει ξ$\in$(2,3) τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=-\frac{5}{3}$⇔-2ξ+4=$-\frac{5}{3}$⇔-2ξ= $-\frac{5}{3}-\frac{12}{3}\Leftrightarrow -2\xi=-\frac{17}{3}$⇔ξ=$\frac{17}{6}>2$

Δεκτό

Γ4)

Έχουμε y'(t)=0,5 μον/sec

Είναι εφω=$\frac{AM}{OA}=\frac{y}{2}$

Ως προς t: εφω(t)= $\frac{y(t)}{2}$

Παραγωγίζω και έχω: (1+εφ^{2}ω(t))ω΄(t)= $\frac{y'(t)}{2}$

Την t=t_0: y(t_0)=1, x(t_0)=2, y'(t_0)=0,5

εφω(t_0)= $\frac{y(t0)}{2}$=$\frac{1}{2}$

άρα ω(t_0)=$\frac{\frac{'0,5}{2}}{1+(0,5)^2}=\frac{0,25}{1+0,25}=0,2\ rad/sec$

Θέμα Δ

Δ1. f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

$f'(x)=\left(\frac{lnx+\alpha x}{x}\right)' = \frac{(lnx+\alpha x)'\cdot x-(lnx+\alpha x)\cdot (x)'}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)\cdot x-(lnx+\alpha x)}{x^2} = \frac{1+\alpha x-lnx-\alpha x}{x^2} = \frac{1-lnx}{x^2}$, $x>0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-lnx}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-lnx=0 \Leftrightarrow lnx=1 \Leftrightarrow x=e$

x	0		e		+∞
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

f ↑ στο $(0,e]$ και f ↓ στο $[e,+\infty)$

Η f παρουσιάζει στο x=e ολικό μέγιστο το $f(e)=\frac{lne+\alpha\cdot e}{e} \Rightarrow f(x)\le\frac{1+\alpha\cdot e}{e}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Από το σύνολο τιμών της f έχουμε ότι $f(x) \le 1+\frac{1}{e}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Οπότε πρέπει $\frac{1+\alpha\cdot e}{e}=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e}+\alpha=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha=1$

Δ2.

Ορίζω $f(x)=\frac{lnx+x}{x}$ στο $[\frac{1}{2},1] \subset (0,+\infty)$

f συνεχής στο $[\frac{1}{2},1]$

$f(\frac{1}{2})=\frac{ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{-ln2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-2ln2+1=-ln4+lne=ln\frac{e}{4}<0$

$f(1)=\frac{ln1+1}{1}=1>0$

άρα $f(\frac{1}{2})\cdot f(1)<0$, οπότε από θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\frac{1}{2},1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

η f είναι γνησίως μονότονη στο $(\frac{1}{2},1) \subset (0,e]$ άρα και 1-1, οπότε η $x_0\in(\frac{1}{2},1)$ είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(0,e]$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ άρα

$f([e,+\infty))=(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(e)]=(1, 1+\frac{1}{e}]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{lnx+x}{x}\right) \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(lnx+x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{1}=1$

Εφόσον $0\notin f([e,+\infty))$, η $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $[e,+\infty)$

Συνεπώς η $x_0\in(\frac{1}{2},1)$ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$.

Δ3.
ι) Στο $[e,+\infty)$
$f(x)=f(4) \Leftrightarrow x=4$ προφανής ρίζα
και η f γνησίως μονότονη , άρα και 1-1 στο $[e,+\infty)$ $x=4$ μοναδική ρίζα της $f(x)=f(4)$ στο $[e,+\infty)$

Στο $(0,e]$
έχουμε $f(2)=\frac{ln2+2}{2}$
και $f(4)=\frac{ln4+4}{4}=\frac{2ln2+4}{4}=\frac{ln2+2}{2}$

άρα $f(2)=f(4)$
οπότε $f(x)=f(4)$ έχει ρίζα την $x=2$
και f γνησίως μονότονη, άρα και 1-1 στο $(0,e]$ $x=2$ μοναδική ριζα της $f(x)=f(4)$ στο $(0,e]$

II) $2^x\leq x^2$ στο $(0,+\infty)$

$\Leftrightarrow ln2^x\leq lnx^2 \Leftrightarrow xln2\leq 2lnx \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{ln2}{2}\leq\frac{lnx}{x}\Leftrightarrow\frac{lnx}{x}+1\geq\frac{ln2}{2}+1 \Leftrightarrow f(x)\geq\frac{ln2+2}{2}$ $x\in(0,+\infty)$

στο $(0,e]$
$f(x)\geq\frac{ln2+2}{2}\Leftrightarrow f(x)\geq f(2) \Leftrightarrow$ f γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow x\geq 2$ άρα $x\in[2,e]$

στο $[2,+\infty)$
$f(x)\geq\frac{ln2+2}{2}\Leftrightarrow f(x)\geq f(4) \Leftrightarrow$ f γνησίως φθίνουσα $\Leftrightarrow x\leq 4$ άρα $x\in[e,4]$

Συνεπώς $x\in[2,4]$

Δ4.
$g(x)=f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}$
$E(\Omega)=\int_{-ln2}^{0}|g(x)|\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|g(lnu)|\,\frac{du}{u}$

θέτω $x=\ln u \Leftrightarrow$
$(x)'dx=(\ln u)'du$
$dx=\frac{1}{u}du$
$x=-\ln 2 \rightarrow u=\frac{1}{2}$

$x=0 \rightarrow u=1$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\cdot\frac{1-\ln u}{u}\right|\frac{du}{u} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\cdot\frac{1-\ln u}{u^2}\right|\frac{du}{u} \Leftrightarrow E(\Omega)= \int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)\cdot f'(u)|du$

$f'(u)>0$ για κάθε $u\in[\frac{1}{2},1]\subset(0,e)$

$\frac{1}{2}\le u\le x_0 \Leftrightarrow$ f γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f(u)\le f(x_0) \Leftrightarrow f(u)\le 0 \Leftrightarrow |f(u)|=-f(u)$

$x_0\le u\le 1 \Leftrightarrow$ f γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f(u)\ge f(x_0) \Leftrightarrow f(u)\ge 0 \Leftrightarrow |f(u)|=f(u)$

Άρα $E(\Omega) = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}(\frac{1}{2}f^2(u))'du + \int_{x_0}^{1}(\frac{1}{2}f^2(u))'du = -[\frac{1}{2}f^2(u)]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + [\frac{1}{2}f^2(u)]_{x_0}^{1} =$
$=-\frac{1}{2}f^2(x_0)+\frac{1}{2}f^2(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f^2(1)-\frac{1}{2}f^2(x_0) \overset{f(x_0)=0}{=} \frac{1}{2}f^2(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f^2(1) = \frac{1}{2}(1-2\ln 2)^2+\frac{1}{2}1^2=\frac{1}{2}(2-4\ln 2+4\ln^2 2)$ τμ

Επιμέλεια:

Καλαϊτζίδης Θεόδωρος, Πανάγου Γεώργιος, Γεωργιάδης Κωνσταντίνος, Σωτηρόπουλος Άρης, Πασχάλης Νίκας, Σπυρόπουλος Παναγιώτης, Οικονόμου Ελένη, Ντζουροπάνος Δημήτρης, Ντίμερης Σπύρος, Στάκα Ευαγγελία, Χασαλεύρης Θάνος, Σταυρακάκης Γιάννης, Σπανάκης Μιχάλης, Βαρδουλάκης Νίκος, Κολοκυθά Βασιλική, Πρώιας Δημήτρης, Λουλακάς Γιώργος, Ζένιος Παναγιώτης,Πετρά Ζωή, Καραγεώργος Θεμιστοκλής, Καραμπετάκη Δομνίκη

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιάς, Κερατσίνι Ταμπούρια, Διαδικτυακό, Κερατσίνι Αμφιάλη, Νίκαια, Λαμία, Μοσχάτο, Κατερίνη,Περιστέρι Κέντρο, Καβάλα,Κιάτο, Φιλοθέη Ψυχικό, Περιστέρι Νέα Ζωή